

# 不连续边界形状下土压力的严密解法

姜朋明, 陆长锋

(江苏科技大学 土木工程系, 江苏 镇江 212003)

**摘 要:** 分析不连续边界形状下土体中不连续应力场和速度场特征, 根据应力不连续线和速度不连续的性质, 在考虑有重土、土和墙体摩擦情况下, 同时利用上、下限定理, 构建算法; 通过数值计算解三类边值问题, 求得挡土墙绕基底转动下, 墙后不连续边界形状下土体的静力场, 同时对对应的机动场进行分析, 找出了满足所有速度边界条件和静力边界条件的应力场, 得到绕墙基转动下挡土墙土压力的严密解。算例表明: 求解极限平衡问题真解的算法是可行的。

**关 键 词:** 不连续边界形状; 极限分析; 土压力; 滑移线; 上下限定理

**中图分类号:** TU 432

**文献标识码:** A

## Rigorous solution method for earth pressure under discontinuous surface

JIANG Peng-ming, LU Chang-feng

(Department of Civil Engineering, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, China)

**Abstract:** Based on upper and lower bound theorems, according to the characters of discontinuous line of stress and velocity, the stress field and the corresponding velocity field were got by the numerical calculation to solve three kinds of boundary value problems. The weight of soil and the friction between soil and retaining wall were taken into account. The stress field satisfied with all velocity boundaries was found. The rigorous solution of earth pressure under discontinuous surface was solved. The computation results showed that the approach which solved the limit equilibrium problem is available.

**Key words:** discontinuous surface; limit analysis, earth pressure, slip line, upper and lower bound theorems

## 1 引 言

Rankine 土压力理论建立在填土面水平、挡土墙垂直且墙背光滑基础之上, 其解满足静力平衡条件和破坏准则, 是可静解, 同时对挡土墙平时又满足运动边界条件, 因而是完全解。Coulomb 土压力理论, 通过墙后土块体平衡建立起来的, 没有进行运动分析, 其解为极限问题的下限解。

填土边界形状不连续, 且挡土墙绕基底转动情况下, 边界条件复杂, 极限土压力精确解、经典方法难以解决。

水平层条分法采用库仑土压力理论的假设, 填土破坏面为斜直线, 土压力是墙后填土在极限平衡状态下出现的滑动楔体产生的, 是通过在楔体中取水平层单元, 建立平衡微分方程而求得。挡土墙变

位的影响是通过将不同变位方式所产生的摩擦力施加到微分平衡方程中来考虑的, 从而研究各种变位情况下土压力的大小及分布规律<sup>[1-5]</sup>, 不能反映出边界速度的分布带来的影响, 且不能给出土体中的应力场和应变场。所得的解不能满足真正的速度边界, 依然属于下限解。

对于土压力问题的上限解, 大多数是通过假定速度分布或建立机动允许的速度场, 在上限定理的基础上求得<sup>[6, 7]</sup>。

弹塑性有限元方法计算参数多, 难以确定, 计算复杂。对于许多岩土体来讲, 并不需要知道应力-应变随外荷载如何变化, 只需求出最终达到极限状态时所对应的破坏荷载。将上限解和下限解结合求得极限问题的真解有着重要研究价值, 这方面研究很少。沈珠江曾求得无重土情况下填土表面受不连

续超载挡土墙土压力的严密解<sup>[8]</sup>。考虑土体重度时计算难度加大,求得的土压力分布,土体中的应力场与无重土相差很大。本文通过数值解法求得挡土墙在绕墙基转动下墙后土压力的严密解。所谓严密解是指该解通过数值计算进行,具有严密的理论意义,非常接近真解,属于精确数值解。

求严密解时,基本假定如下:该问题为平面应变问题;墙后土体为理想的刚塑性体,破坏时服从Mohr-Coulomb屈服准则;墙后填土为服从相关流动法则;墙体为刚性的且绕墙基作转动,墙背与填土的摩擦角为常量;填土为均质土。

## 2 基本原理

### 2.1 上下限原理的推论

对于一定的物体而言,如果能够找到一个静定应力场 $\sigma_{ij}^0$ ,据此应力场按相关联动法则求出的应变率场 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ 和速度场 $v_i$ 正好又是一个机动场,则与这样的静定应力场和机动场相对应的荷载必为该物体的真正极限荷载或是极限荷载的精确解<sup>[9]</sup>。

挡土墙墙后土体形状不连续,给定了应力边界和速度边界,绕墙基转动问题属于第一类极限问题<sup>[10]</sup>,与一般土压力不同的是,仅依靠静力分析无法得到完全解,必须进行相应的运动分析。本文基于上下限原理的推论,寻求绕墙基转动刚性挡土墙土压力的严密解。

### 2.2 土体中不连续应力场

如图1所示,挡土墙后填土边界形状不连续,oe段上作用荷载 $q_1$ ,墙体ob绕墙基b点向土体方向转动。

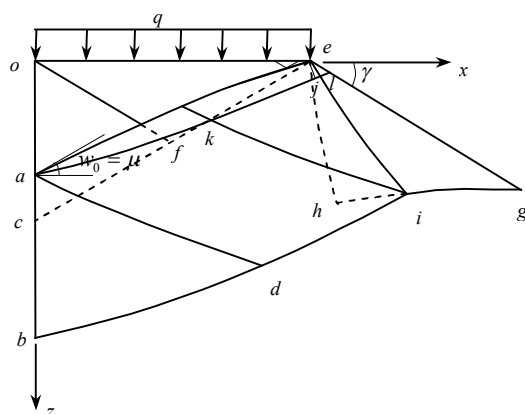


图1 计算模型  
Fig.1 Calculation model

由于该问题土体表面形状不连续,类似承受不连续的边界荷重,土体中必然会出现应力不连续线。由于 $q_1 > q_2$  ( $q_2 = 0$ ,  $q_2$ 为eg段超载),且墙体向

土体方向转动,根据主应力方向可以判别该应力不连续线,它必然从应力突变处开始向墙体方向延伸。由于墙体为刚性,且没有速度间断,所以从填土表面应力突变处延伸来的应力不连续线必在墙体处消失,因此和该处的特征线重合,即在a点有 $w_0 = \mu$ ,  $w_0$ 为应力不连续线的在a点的切向角,  $\mu$ 为主应力方向和滑移线夹角,  $\mu = \pi/4 - \varphi/2$ ,  $\varphi$ 为土体内摩擦角。

根据应力不连续线产生的几何条件,在土体abie区中是否会产生第2条应力不连续线,取决于不连续线ae和土体ab两应力边界上主应力的方向角。在土体ikeg区中是否会产生第3条应力不连续线,取决于不连续线ae和土体eg两应力边界上主应力的方向角。土体中应力不连续位置线将影响土体应力场的分布。

### 2.3 应力不连续线和速度不连续线的特征

#### 2.3.1 应力不连续线及特征

应力不连续线又称应力间断线,实际上是一个薄层过渡区,在这薄层过渡区内,应力发生急剧的变化,造成间断线两侧应力发生间断现象,满足以下条件<sup>[11]</sup>。

#### (1) 应力条件

如图2所示,设应力不连续线 $l_s$ 将滑动场分层塑性区①和塑性区②,两边应力单元如图所示,只有切向正应力可以发生间断,正应力和剪应力相等,即

$$\sigma_{t1} \neq \sigma_{t2}, \sigma_{n1} = \sigma_{n2}, \tau_{n1} = \tau_{n2} \quad (1)$$

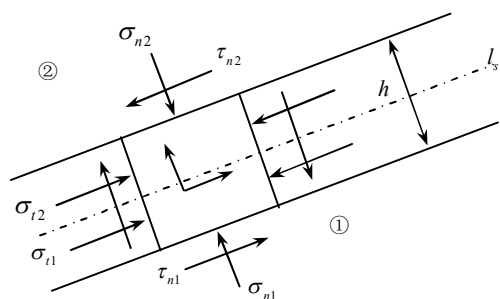


图2 应力不连续线  
Fig.2 Discontinuous stress line

在①、②两个塑性区域,应力间断线上的应力都应当满足Mohr-Coulomb屈服条件。设: $\theta^+$ 、 $\theta^-$ 分别为塑性区①、②大主应力的方向角; $\delta^+$ 、 $\delta^-$ 分别为主应力方向和应力不连续线切线的夹角。则:

$$\omega = \theta^+ + \delta^+ = \theta^- + \delta^- \quad (2)$$

由上式及塑性区两侧都应当满足Mohr-Coulomb屈服条件,可求得塑性区①、②等效应力

之间关系为

$$\sigma_e^+ = \eta \sigma_e^- \quad (3)$$

其中:

$$\eta = \left( \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\tan^2(\theta^+ - \theta^-)}} + \sin \varphi \right)^2 \frac{\sin^2(\theta^+ - \theta^-)}{\cos^2 \varphi} \quad (4)$$

$\delta^-$ 、 $\delta^+$  有两组解为

$$\delta^+ = \arctan \left[ \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\tan^2(\theta^+ - \theta^-)}} \right) \frac{\tan(\theta^+ - \theta^-)}{1 + \sin \varphi} \right] \quad (5)$$

$$\delta^- = \arctan \left[ \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\tan^2(\theta^+ - \theta^-)}} \right) \frac{\tan(\theta^+ - \theta^-)}{1 + \sin \varphi} \right] \quad (6)$$

或:

$$\delta^+ = \arctan \left[ \left( -1 - \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\tan^2(\theta^+ - \theta^-)}} \right) \frac{\tan(\theta^+ - \theta^-)}{1 + \sin \varphi} \right] \quad (7)$$

$$\delta^- = \arctan \left[ \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\tan^2(\theta^+ - \theta^-)}} \right) \frac{\tan(\theta^+ - \theta^-)}{1 + \sin \varphi} \right] \quad (8)$$

(2) 几何条件:

应力间断线不可能同时又是滑移线, 当滑移线从一个区到另一个区时, 滑移线发生弯折。根据式(1), 可推得

$$\cos(2\omega - \theta_2 - \theta_1) + \sin \varphi \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (9)$$

(3) 运动条件

由于应力不连续线上的切向速度变化为 0, 则满足条件:

$$dv_x \cos \omega + dv_y \sin \omega = 0 \quad (10)$$

设  $(v_\alpha, v_\beta)$  为沿特征线方向的速度分量, 且有:

$$v_x = [v_\alpha \sin(\theta + \mu) - v_\beta \sin(\theta - \mu)] \sec \varphi \quad (11)$$

$$v_y = [-v_\alpha \cos(\theta + \mu) + v_\beta \cos(\theta - \mu)] \sec \varphi \quad (12)$$

由此可得下列应力不连续线的刚性移动条件:

$$\begin{aligned} & \sin(\theta + \mu - \omega) dv_\alpha - \sin(\theta - \mu - \omega) dv_\beta = \\ & [-v_\alpha \cos(\theta + \mu - \omega) + v_\beta \cos(\theta - \mu - \omega)] d\theta \end{aligned} \quad (13)$$

### 2.3.1 速度间断线及特征

速度间断线可以认为是两个速度之间存在的

过渡层的极限情况。在服从正交流动法则基础上, 速度不连续线一定是滑移线, 或者是滑移线的包络线。刚性区与塑性区交界线一定是速度间断线。对于 Mohr-coulomb 材料速度方向和滑移线方向成  $\varphi$  角。

根据以上特征, 求解三类边值问题, 可求得极限问题严密解。

## 3 算法

以绕墙底向外转动的主动土压力情况为例, 说明严密解法的过程。

### 3.1 静力计算

填土面  $oe$ 、 $eg$  上小主应力分别为  $q_1=0$ 、 $q_2=0$ , 方向角  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  均为  $\pi/2$ , 与填土表面垂直。

(1) 从边界  $oe$ 、 $eg$  开始解 Cauchy 问题, 以很密的网格计算  $oef$  区和  $ehg$  区的滑移场;

(2) 以滑移线  $of$  边和挡墙与土的摩擦条件, 解混合问题, 求得  $ofc$  区的滑移场;

(3) 根据  $e$  点奇异性及  $a$  点不连续线特点, 在主动区内选定不连续线  $ae$ , 具体做法是先选定  $a$  点, 并假定一组  $oae$  区的主应力方向角  $\theta^+$ , 然后通过迭代法按式(2)和式(3), 求出  $bae$  区方向角  $\theta^-$ 、不连续线的切线方向  $\omega$  及  $ae$  线各坐标点。该过程称之为第 4 类边值问题<sup>[10]</sup>;

(4) 从  $ae$  线出发, 将  $ae$  线看作应力边界<sup>[12]</sup>, 解 Cauchy 问题, 求得  $aej$  区的滑移线场;

(5) 根据  $ae$  和  $eg$  边主应力方向判断是否产生应力不连续条件; 解第四类边界问题, 求得  $ie$  位置、其上应力及方向角。

(6) 从  $ie$  线出发, 将  $ie$  线看作应力边界, 解 Cauchy 问题, 求得  $iek$  区的滑移线场;

(7) 有  $ak$  边和  $ki$  边, 解 Riemann 问题, 求得  $kida$  区的滑移场;

(8) 由  $ad$  边及挡土墙上摩擦条件, 解混合问题, 求得  $abd$  区滑移场及挡土墙上土压力分布。

由于上述不连续线为假设的, 不同不连续线其解不同, 所以上述静力解不是唯一的, 为下限解。为求得真解尚需进行运动分析, 寻求得符合速度边界条件的解。

### 3.2 运动场分析

分析时假定墙绕下端  $b$  点向土体转动,  $a$  点速度为一个单位。

从  $ab$  边出发解 Cauchy 问题, 求得  $abd$  区速度场; 由  $ad$  边和  $di$  边, 解 Riemann 问题, 求得  $adik$  区速度场; 根据  $ie$  线应力不连续线上的速度条件(式

(13)) 和  $ik$  边的速度, 求得  $ijk$  区速度场和  $jk$  线上的速度。根据  $ae$  线应力不连续线上的速度条件 (式 (13)) 和  $aj$  边的速度, 求得  $aejk$  区速度场和  $ae$  线上的速度。由  $ae$  线上的速度分布和  $oa$  边速度特点, 解混合问题, 求得  $oae$  区速度场及  $oa$  段速度分布。

至此运动分析全部结束, 接下来检查整个  $ob$  边是否满足已知绕  $b$  点刚性转动条件。如果不满足, 需要修改不连续线  $ae$  上的输入值, 全部重算。直至满足全部的运动条件和静力边界条件。

## 4 程序应用

基于以上算法, 用 Fortran90 语言编写了计算程序 RB\_DIS\_SUR.f90, 利用 Matlab 的强大绘图功能直接进行后处理 (程序及相关说明略)。下面介绍其应用。

### 4.1 主动土压力计算

现对  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\rho = 20 \text{ kN/m}^3$ ,  $c = 0$ , 土面荷重  $q_1 = 20 \text{ kPa}$ , 墙面与土体摩擦角  $\delta = 15^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$  墙高为  $6 \text{ m}$  的挡土墙土压力进行计算。设挡土墙绕墙底向离开土体方向转动。

解得主动土压力分布, 土体的滑移场, 速度分布见图 3。箭头表示速度的方向, 其下数值表示相对速度的大小。该土压力即为满足不连续应力边界和绕基底向外转动的速度边界。

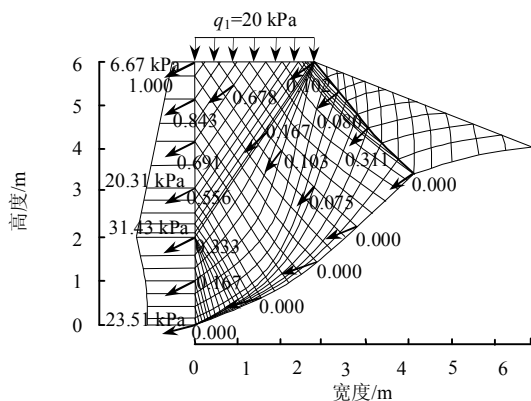


图 3 主动状态土体滑移场、速度及土压力分布  
Fig.3 The slip line field and distribution of velocity and active earth pressure

主动情况  $q_1$  为大主应力, 应力不连续线伸向土中, 由于绕底部转动, 在刚塑性区的分界面上, 速度为 0, 不连续线可以与此线相交, 由式 (13) 可推出应力不连续线上速度都为 0。从图中可以看出, 计算所得速度场满足这些条件。因而是严密解。

### 4.2 被动土压力计算

设墙体绕基底向土体方向转动。解得的土体滑

动场、应力不连续线、土压力以及速度分布如图 4 所示。

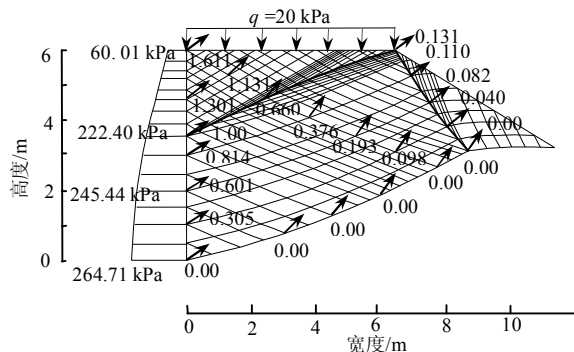


图 4 被动状态土体滑移场、速度及土压力分布  
Fig.4 The slip line field and distribution of velocity and passive earth pressure

结果显示达到极限状态时, 土体中出现第 1 条应力不连续线, 该线始于荷载不连续处, 在  $a$  点处和滑移线相切; 在  $ajib$  区内, 不出现应力不连续线。在  $kige$  区产生第 2 条应力不连续线。与无重土情况不同, 无重土体中出现 3 条不连续线, 且均为直线<sup>[8]</sup>。文献[13]中认为局部荷载产生的土压力沿平行于破裂面的方向传递至墙背上的近似方法, 存在较大误差, 方法缺乏依据。

## 5 结 论

(1) 不连续边界形状下挡土墙, 是工程中经常遇到的问题, 正确计算土压力分布, 对挡土墙设计非常重要。本文解为极限状态的精确数值解, 其解是唯一的。

(2) 考虑土体重度时, 此问题计算非常复杂。计算结果与不考虑土体重度时差别较大。在不考虑土体重度时计算结果与文献[2]基本相符。

(3) 极限问题的真解, 需通过解平衡方程和塑性流动方程, 才可得到。数学求解非常困难。基于极限分析的上下限定理土压力的求得解满足所有的静力边界和速度边界, 是严密的理论解, 非常接近极限问题的真解, 是求解极限问题的一条途径。

(4) 对于更复杂的应力边界和速度边界情况下, 土中的应力场和速度场更加复杂, 应用不连续解法将更加困难。本文给出了一般算法, 可在此基础上寻求更加接近严密解的近似解, 服务于工程应用。

## 参 考 文 献

- [1] WANG Y Z. Distribution of earth pressure on a retaining wall[J]. *Geotechnique*, 2000, 50(1): 83—88.

- [2] 王元战. 墙体绕基础转动情况下挡土墙主动土压力分布[J]. 岩土工程学报, 2003, 13 (2): 208—211.
- [3] 顾长存. 不同变位模式下挡土墙被动土压力的计算与分析. 河海大学学报[J]. 2005, 33 (4): 430—433.
- [4] FANG Y S, ISHIBASHI I. Static earth pressure with various wall movements[J]. **Journal of Geotechnique Engineering**, ASCE, 1986, 112(3): 317—333.
- [5] FAN G F S, CHEN T J, WU B F. Passive earth pressure with various wall movements[J]. **Journal of Geotechnique Engineering**, ASCE, 1994, 120(8): 1 307—1 323.
- [6] ABDUL HAMID SOUBRA. Upper bound solution bearing capacity of foundations[J]. **Journal of Geotechnical and Geo-environmental Engineering**, 1999, (1): 59—69
- [7] 高和斌, 朱本珍, 朱大勇. 被动土压力系数的上限解[J]. 路基工程 2003, (3): 14—16.
- [8] 沈珠江. 不连续解在极限土压力计算中的应用[C]//土力学论文集. 北京: 清华大学出版社, 2005: 65—76.
- [9] 张学言. 岩土塑性力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 1993: 292—329.
- [10] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2002: 187—229.
- [11] 杨明成, 郑颖人. 岩土材料滑移线场理论中的应力间断线[J]. 宁夏大学学报, 2002, 23 (1): 34—36.
- [12] 杨明成, 郑颖人. 滑移线场理论中非特征线应力边界条件的解析式[J]. 岩土力学, 2002, 22 (4): 395—398.
- [13] 陈仲颐, 周景星, 王洪瑾. 土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994: 196—223.